

CESAR SCHOOL

JOÃO VITOR PEREIRA VENTURA

**ESTADO DA ARTE DE MACHINE LEARNING APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE
TOPOLOGIAS TRIDIMENSIONAIS**

Recife

2025

JOÃO VITOR PEREIRA VENTURA

ESTADO DA ARTE DE MACHINE LEARNING APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIAS TRIDIMENSIONAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Programa de Graduação em Ciência da computação da CESAR SCHOOL, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da computação.

Orientador: Anderson Tenório Sergio Ph.D.

Coorientadora: Tarciana Araújo Brito de Andrade Ph.D.

Recife

2025

FICHA



AUTOR

TÍTULO

Trabalho aprovado em Recife: xx/xx/xxxx.

Professor:
(CESAR SCHOOL)
Orientador

Professor:
(CESAR SCHOOL)
Avaliador Interno

Professor:
(INSTITUIÇÃO)
Avaliador Extern

RECIFE
2024

À minha família, meus amigos, meus professores e aos meus orientadores, pelo seu tempo e carinho.

Tudo já foi escrito, tudo já foi dito, tudo já foi feito, ouviu Deus que lhe diziam e não havia criado o mundo ainda, não havia nada. Também isso já me disseram, replicou talvez da velha fendida Nada. E começou.

Uma Romena me cantou uma frase de musica folclórica e eu a tenho achado desde então dez vezes em diversas obras e autores dos últimos quatrocentos anos. Sem dúvida as coisas não começam quando são inventadas. Ou o mundo foi inventado antigo.

(Macedonio Fernández)

RESUMO

Este trabalho apresenta um levantamento sistemático do estado da arte de aprendizado de máquina aplicado à otimização de topologias tridimensionais, abordando estudos publicados nos últimos cinco anos. A pesquisa utilizou uma string de busca composta por termos relacionados à otimização de topologia e aprendizado de máquina em bases de dados de artigos como Google Scholar, SpringerLink e ResearchGate, resultando na seleção de trabalhos que foram consequentemente filtrados por título, resumo e análise integral, e ordenados hierarquicamente de acordo com a diferença entre o compliance do método proposto e o compliance de métodos tradicionais avaliados no mesmo caso de teste. Identificaram-se trabalhos que dispensam completamente o uso de algoritmos clássicos de otimização de topologia e trabalhos que incluem aprendizado de máquina no processo tradicional, de uma ou de outra maneira. Destaca-se a capacidade desses modelos de reduzir o tempo de processamento entre 60%-99%, sem comprometer a acurácia do resultado final (ou inclusive melhorando-a). Embora os avanços sejam expressivos, a ausência de benchmarks padronizados e de validações experimentais em larga escala limita a comparabilidade com métodos clássicos e a adequação industrial. Este trabalho ressalta padrões, lacunas e oportunidades de pesquisa, apontando para a necessidade de frameworks de avaliação, a fim de se obter maior certeza sobre a eficácia do método.

Palavras-chave: inteligência artificial; aprendizado de máquina; otimização de topologia; topologias 3D; deeplearning; redes neurais; mecânica computacional.

ABSTRACT

This work presents a systematic survey of the state of the art in machine learning applied to three-dimensional topology optimization, covering studies published over the past five years. The search employed a search string comprising terms related to topology optimization and machine learning in databases such as Google Scholar, SpringerLink and ResearchGate. This resulted in an initial set of papers that were subsequently filtered by title, abstract and full-text review, and then ranked according to the difference between their compliance values and the compliance values of traditional methods on the same test case. Two main categories were identified: those that entirely avoid classical topology optimization algorithms and those that integrate machine learning into the conventional optimization process in various ways. The models were notable for reducing processing times by 60%-99% without compromising—and in some cases even improving—the accuracy of the final result. Although these advances are substantial, the lack of standardized benchmarks and large-scale experimental validations limits both comparability with classical approaches and industrial readiness. This survey highlights prevailing patterns, gaps and research opportunities, and underscores the need for uniform evaluation frameworks to establish greater confidence in the efficacy of machine-learning-based topology optimization methods.

Keywords: artificial intelligence; machine learning; topology optimization; 3D topologies; deep learning; neural networks; computational mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O sistema de suspensão do Czinger 21 que reúne várias peças modeladas com TO (CAR Magazine, 2024)	14
Figura 2 – Bracket <i>Nacelle Hinge</i> do Airbus A320 passando pelo processo de TO (Sher D, 2013)	14
Figura 3 – Arquitetura da rede neural (XIANG et al., 2022)	28
Figura 4 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método proposto (XIANG et al., 2022).	29
Figura 5 – Diagrama ilustrando o método <i>Multi-point synergistic gradient topology opitmizaton</i> (WANG et al., 2024).	30
Figura 6 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À direita uma topologia produzida pelo método SIMP, à esquerda pelo método MSGE (WANG et al., 2024).	30
Figura 7 – Diagrama ilustrando o método (SHIN; KIM, 2022).	31
Figura 8 – Diagrama ilustrando a arquitetura da rede neural utilizada (SHIN; KIM, 2022).	32
Figura 9 – Diagrama ilustrando o método TOuNN em duas dimensões (CHANDRA-SEKHAR; SURESH, 2020).	33
Figura 10 – Exemplos da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método TOuNN (CHANDRA-SEKHAR; SURESH, 2020).	33
Figura 11 – Diagrama ilustrando o método ADL (ZHANG et al., 2024).	35
Figura 12 – Diagrama ilustrando o método OTML (ZHAN et al., 2024).	37
Figura 13 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método OTML (ZHAN et al., 2024).	37
Figura 14 – Diagrama ilustrando o método DMF-TONN (JOGLEKAR et al., 2024). . .	39
Figura 15 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método DMF-TONN (JOGLEKAR et al., 2024).	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Ordenação hierárquica de trabalhos com base na taxa de erro	24
Tabela 2 – Resumo dos artigos analisados	41

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Letra grega Rho
$\in$	Pertence
η	Letra grega Eta
α	Letra grega alpha

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	JUSTIFICATIVA	13
1.2	PROBLEMA	15
1.3	OBJETIVO	15
1.3.1	Objetivo principal	15
1.3.2	Objetivos específicos	15
1.4	ESTRUTURA	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	CALCULO DIFERENCIAL PARCIAL	17
2.2	ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS	18
2.3	OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	18
2.4	COMPLIANCE	19
2.5	MACHINE LEARNING	19
2.6	MACHINE LEARNING APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	20
3	METODOLOGIA	21
3.1	PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	21
3.1.1	String de busca	21
3.1.2	Sites de busca de artigos científicos	21
3.1.3	Filtragem por título	22
3.1.4	Filtragem por abstract	22
3.1.5	Filtragem por leitura de artigo na integra	22
3.1.6	Ordenação hierárquica de artigos e definição do estado da arte	22
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	24
4.1	CLASSIFICAÇÕES	24
4.2	DESCRIÇÃO DOS ESTUDOS QUE COMPÕEM O ESTADO DA ARTE	26
4.2.1	"Accelerated topology optimization design of 3D structures based on deep learning":	26
4.2.2	"A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs":	29

4.2.3	"Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network":	30
4.2.4	"TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks":	32
4.2.5	"Enhancing topology optimization with adaptive deep learning": . . .	33
4.2.6	"A one-time training machine learning method for general structural topology optimization":	35
4.2.7	"DMF-TONN: Direct Mesh-free Topology Optimization using Neural Networks":	38
4.3	ANÁLISE DO ESTADO DA ARTE	39
5	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

A otimização de topologia (TO) é uma técnica de mecânica computacional que consiste na geração de topologias (leia-se “formas”) de maneira algorítmica, visando uma distribuição ótima de material para um dado domínio e condições específicas (SHIN; KANG; SHIN, 2022). O processo pode, em teoria, produzir peças mais leves, pelo fato de utilizar o mínimo de material possível, sem comprometer as propriedades estruturais (SHIN; KANG; SHIN, 2022).

Modelos 3D otimizados através de algoritmos começam a ter maior relevância à medida que a impressão 3D ganha força de mercado, pois, na maioria dos casos, essa é a única maneira de fabricá-los. A indústria da impressão 3D está prevista para crescer 30% ao ano e chegar a movimentar cerca de 150,2 bilhões de dólares em 2032 (FORTUNE BUSINESS INSIGHTS, 2024), trazendo avanços que fazem com que os benefícios teóricos da TO se tornem cada vez mais realidade. Um testemunho da vantagem desse método de modelagem pode ser visto, por exemplo, na quebra de recorde de tempo ao redor do Circuit of the Americas, em Laguna Seca, e no Festival of Speed de Goodwood, pelo carro Czinger 21 C, que tem várias peças modeladas com TO e impressas (CZINGER, [s.d.]). O automobilismo requer peças leves dado o fato que quanto mais leve o carro for, mais rápido ele pode ir, além disso, ele requer peças com uma altíssima resistência. O fato de o Czinger 21 C ter quebrado vários recordes de pista é um bom indicador empírico da vantagem funcional da TO.

Apesar das vantagens, esta técnica encontra limitações devido ao seu elevado custo computacional, uma vez que se baseia em diversas iterações de análises numéricas complexas, tornando sua aplicação muitas vezes inviável (SHIN; KANG; SHIN, 2022).

Nesse contexto, o emprego de técnicas de *machine learning* (ML) surge como abordagem promissora para reduzir significativamente o tempo e o custo envolvidos nesses processos. Ao utilizar modelos de ML, é possível acelerar o processo de otimização em várias ordens de grandeza, e, ao mesmo tempo, manter resultados com níveis satisfatórios de precisão. Dessa forma, o uso de ML em TO permite tornar viáveis aplicações que antes eram limitadas ou inviáveis por restrições computacionais, acrescentando assim uma técnica de modelagem poderosa à caixa de ferramentas dos engenheiros.

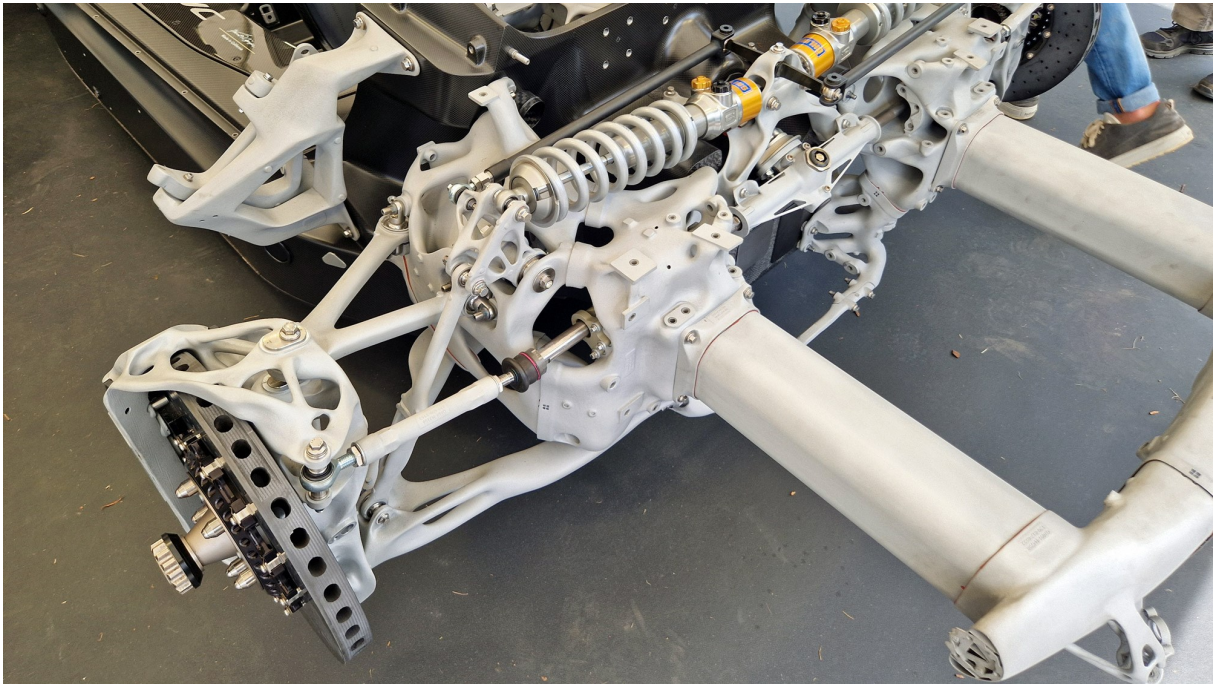


Figura 1 – O sistema de suspensão do Czingher 21 que reúne várias peças modeladas com TO (CAR Magazine, 2024)

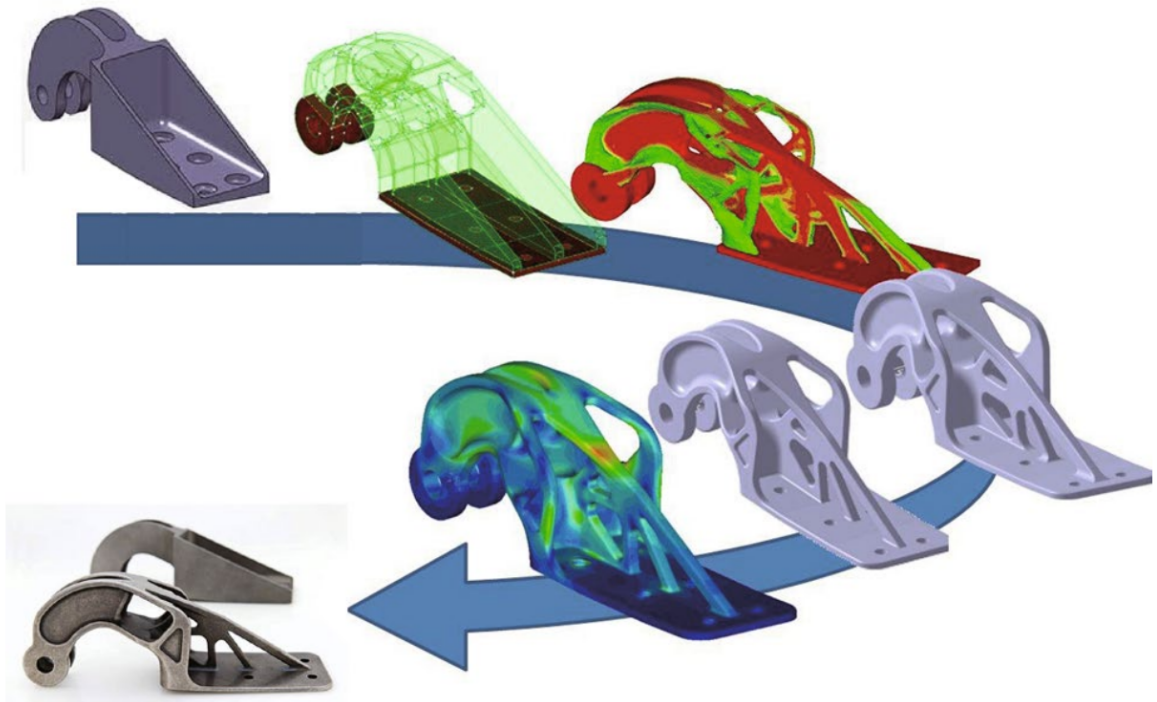


Figura 2 – Bracket *Nacelle Hinge* do Airbus A320 passando pelo processo de TO (Sher D, 2013)

1.2 PROBLEMA

Em decorrência da atual explosão de popularidade da inteligência artificial (IA) (STANFORD UNIVERSITY, 2025), técnicas como a de machine learning aplicado à otimização de topologia (MLTO) têm naturalmente recebido, por sua parte, desenvolvimento científico crescente. Porém, há poucas revisões sistemáticas dos artigos publicados sobre o tema (destacam-se os artigos de Shin, Kang e Shin: “Topology Optimization via Machine Learning and Deep Learning: A Review” e de Chamatidis et al.: “Overview on Machine Learning Assisted Topology Optimization Methodologies”), e há ainda menos revisões dedicadas exclusivamente a topologias tridimensionais — as que são realmente relevantes à manufatura. Julga-se, portanto, importante responder à seguinte pergunta por meio do trabalho atual: “O que há de mais novo e melhor sobre machine learning aplicado à otimização de topologias tridimensionais?”, para assim, ilustrar o panorama da área, demonstrar tendências e servir potencialmente para indicar áreas inexploradas e pontos fortes e de melhoria para o trabalho futuro de pesquisadores interessados, com o objetivo final de desenvolver mais a área.

1.3 OBJETIVO

1.3.1 Objetivo principal

Descrever o estado da arte de MLTO.

1.3.2 Objetivos específicos

- OE1: Descrever o funcionamento de TO para fins de contextualização.
- OE2: Descrever o funcionamento de ML e como ele é aplicado à TO, para fins de contextualização.
- OE3: Estabelecer uma metodologia de pesquisa robusta.
- OE4: Ordenar hierarquicamente os artigos encontrados para definir o que realmente "ha de melhor", baseado exclusivamente na performance estrutural dos algoritmos apresentados e não em questões como tempo de processamento.

- OE5: Realizar uma análise com base nos dados coletados para identificar padrões, limitações e áreas que precisam de melhoria.

1.4 ESTRUTURA

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1, “Introdução”, apresentam-se a motivação e a relevância do tema; define-se o problema de pesquisa; expõem-se os objetivos gerais e específicos; e descreve-se brevemente a estrutura do trabalho. No Capítulo 2, “Fundamentação Teórica”, são abordados os conceitos fundamentais necessários à compreensão do estado da arte de MLTO. No Capítulo 3, “Metodologia”, detalham-se os procedimentos adotados para o levantamento e seleção dos artigos, bem como o método de ordenação hierárquica dos estudos, a fim de elaborar o estado da arte. No Capítulo 4, “Resultados e Discussão”, apresentam-se os trabalhos selecionados de maneira ordenada; descrevem-se em detalhe os melhores estudos; e oferece-se uma análise crítica do estado da arte, identificando suas tendências, lacunas, oportunidades de pesquisa e limitações. No Capítulo 5, “Conclusão”, sintetizam-se as principais contribuições do levantamento. Finalmente, ao término do documento, encontra-se a lista completa de referências bibliográficas utilizadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo, são apresentados os conceitos centrais para o entendimento do trabalho. Inicialmente, será feita uma breve revisão dos fundamentos de cálculo diferencial parcial, indispensáveis à compreensão das sensibilidades envolvidas na modelagem física. Em seguida, será apresentada a análise de elementos finitos (FEA), método numérico que permite simular o comportamento de estruturas sob diferentes condições de carregamento. A partir dessa base, será abordada a otimização de topologia (TO); será feita a transição para o aprendizado de máquina (ML), com a descrição de seus principais paradigmas (supervisionado, não supervisionado e de reforço). E, por fim, será discutida especificamente a técnica de MLTO.

2.1 CALCULO DIFERENCIAL PARCIAL

O cálculo diferencial parcial lida com funções de múltiplas variáveis independentes, analisando como a variação de cada uma dessas variáveis afeta o valor da função. De forma mais específica, enquanto o cálculo diferencial simples lida com derivadas de funções de uma variável, o cálculo diferencial parcial introduz o conceito de derivadas parciais, que capturam a taxa de variação da função ao longo de múltiplas variáveis. Por meio dessas derivadas parciais, é possível decompor e entender a influência individual de cada variável no comportamento global do sistema, permitindo uma análise mais rica e detalhada de fenômenos complexos (STRAUSS, 2008).

A relevância do cálculo diferencial parcial torna-se particularmente clara no estudo de problemas multidimensionais, tais como a análise de campos escalares (como temperatura e pressão) ou vetoriais (como deslocamento e velocidade) em domínios espaciais e temporais. Na engenharia, física, economia, biologia e diversas outras ciências, problemas reais muitas vezes não podem ser adequadamente descritos por equações envolvendo apenas uma variável independente. Assim, o uso de derivadas parciais é essencial para a formulação e solução dessas questões.

2.2 ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

A análise de elementos finitos (FEA) é um método numérico que utiliza equações diferenciais parciais para descrever o comportamento de sistemas físicos complexos. A FEA abstrai esses sistemas físicos dividindo seu domínio em elementos pequenos interconectados e, portanto, permitindo sua simulação computacional (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

O princípio fundamental da FEA é a discretização do domínio contínuo em um número finito de subdomínios menores, chamados elementos finitos, em uma *mesh* (malha). Cada elemento conecta-se a pontos chamados nós que interligam os elementos entre si, e, dentro de cada elemento, assumem-se funções de aproximação para as variáveis de interesse, como deslocamentos ou temperaturas. Ao montar as equações de equilíbrio para cada elemento e combiná-las em um sistema global, obtém-se uma aproximação da solução para todo o domínio (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

Explicado sucintamente, a FEA baseia-se na decomposição de estruturas em microestruturas e a partir dela obtém-se uma descrição do sistema macro por meio da soma das descrições dessas microestruturas.

2.3 OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA

Segundo Bendsøe e Sigmund, no livro “Topology Optimization: Theory, Methods and Applications”, o objetivo principal da TO é determinar a distribuição ótima de material dentro de um domínio de projeto especificado seguindo restrições particulares (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Trata-se de um método que visa a melhor distribuição de material para minimizar uma determinada função-objetivo. No caso da TO, as funções-objetivo podem descrever rigidez, conformidade térmica, entre outras propriedades, mas tratam-se sempre de propriedades físicas ideais cujo sistema, em seu estado atual, está mais ou menos apropriado, e que guiam a distribuição de material dependendo do objetivo da configuração (minimização ou maximização) (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O processo de TO envolve a discretização do domínio em elementos finitos e a definição de variáveis de projeto que representam a presença ou ausência de material em cada elemento. A função-objetivo e as restrições (de volume por exemplo) são formuladas em termos dessas variáveis. Métodos como o Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP), sendo este o mais comum, são utilizados para penalizar as áreas com densidades intermediárias, promovendo

soluções binárias (1: material; 0: vazio). A otimização é realizada mediante iterações de FEA, ajustando as variáveis de projeto com base em critérios de conformidade com a função-objetivo, segundo os resultados do FEA, dada uma condição específica (ex.: uma força de magnitude X aplicada no ponto Y), até que a convergência seja alcançada (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

2.4 COMPLIANCE

A noção de *compliance* em TO refere-se à medida da deformação total que uma estrutura apresenta quando submetida a um carregamento específico. Em vez de focar diretamente nos deslocamentos nodais isolados, a compliance leva em conta toda a energia de deformação acumulada ao longo do domínio estrutural, fornecendo um indicador único da “flexibilidade” global do projeto (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

Na prática, ao formular o problema de otimização, a minimização de compliance corresponde à busca pela configuração que resulta na menor deformação possível sob as condições de carga estabelecidas. Esse critério é equivalente à maximização da rigidez da estrutura e, por isso, é amplamente adotado como função-objetivo em diversos métodos de TO, como o SIMP (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

2.5 MACHINE LEARNING

O ML é um subcampo da inteligência artificial que se concentra no desenvolvimento de algoritmos capazes de aprender e fazer previsões ou tomar decisões com base em dados, sem necessidade de instruções explícitas para cada tarefa. Matematicamente, o ML utiliza técnicas estatísticas e computacionais para ajustar parâmetros de modelos, de forma a minimizar ou maximizar funções de perda (erros de previsão ou qualidade de decisão, respectivamente) (GOODFELLOW; BENGIO; COURVILLE, 2016).

O ML pode ser dividido em três abordagens: de aprendizado supervisionado, não supervisionado e por reforço. No aprendizado supervisionado, o modelo é treinado com um conjunto de dados rotulados — ou seja, o algoritmo recebe tanto as entradas quanto as saídas desejadas correspondentes — e o objetivo é aprender uma função que generalize bem, com bom índice de acerto em novos dados, permitindo prever resultados futuros com base em exemplos anteriores. No aprendizado não supervisionado, o algoritmo trabalha com dados não rotulados, buscando padrões, agrupamentos ou estruturas intrínsecas no conjunto de dados por meio de técnicas

como análise de *clusters*, redução de dimensionalidade e detecção de padrões, sendo valioso para extrair informação de grandes volumes de dados desconhecidos e preparar o caminho para análises mais refinadas. Por fim, no aprendizado por reforço, o modelo aprende por meio de interação com um ambiente dinâmico, recebendo recompensas ou penalidades baseadas em suas ações e ajustando sua estratégia ao longo do tempo para maximizar uma recompensa cumulativa (GOODFELLOW; BENGIO; COURVILLE, 2016).

2.6 MACHINE LEARNING APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA

A MLTO visa incorporar modelos de ML ao processo de geração de estruturas otimizadas, seja complementando etapas tradicionais, substituindo-as ou até mesmo prevendo a topologia diretamente a partir de especificações iniciais (SHIN; KANG; SHIN, 2022). Essa abordagem contribui para reduzir o elevado custo computacional dos métodos tradicionais de TO, decorrente das numerosas iterações de FEA necessárias até a obtenção de uma solução convergente. Os modelos baseados em ML são capazes de aprender padrões e relações a partir de dados ou diretamente da física do problema, e, uma vez treinados ou ajustados, podem produzir soluções com qualidade comparável — ou, em alguns casos, superior — em uma fração do tempo (SHIN; KANG; SHIN, 2022).

O objetivo final, portanto, não é apenas acelerar o processo de otimização, mas fazê-lo mantendo a fidelidade física das soluções. A MLTO busca entregar topologias que respeitem os critérios de projeto e possam ser efetivamente aplicadas em cenários reais, com eficiência computacional suficiente para sua aplicação em escala industrial, em problemas complexos ou em contextos que exigem respostas rápidas (SHIN; KANG; SHIN, 2022).

3 METODOLOGIA

Utilizar-se-á uma abordagem mista; com objetivos descritivos, exploratórios e procedimentos técnicos de levantamento. Realizar-se-á uma pesquisa bibliográfica sistemática para reunir artigos relevantes publicados nos últimos cinco anos e, a partir daí, definir quais são as melhores abordagens, utilizando métricas comparáveis.

3.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

3.1.1 String de busca

Utilizou-se a seguinte string de busca na pesquisa:

("topology optimization"OR "structural topology optimization"OR "topological optimization") AND ("machine learning"OR "deep learning"OR "neural networks"OR "reinforcement learning"OR "data-driven") AND ("finite element analysis"OR "FEA")

É necessário ressaltar que há um recorte implícito nos artigos analisados, pois a string de pesquisa não é compatível com todos os principais sites de pesquisa de artigos acadêmicos. Optou-se por utilizar apenas sites compatíveis com a string de pesquisa definida, pois julgou-se mais importante obter resultados mais relevantes ao foco da pesquisa do que diversidade por meio de plataformas de artigos acadêmicos, já que essas plataformas compartilham repertórios de artigos muito parecidos. Optou-se também por não adaptar a string para torná-la compatível com um maior número de plataformas, a fim de preservar a integridade metodológica da pesquisa.

3.1.2 Sites de busca de artigos científicos

Definiram-se os seguintes sites compatíveis com a string de busca para a compilação dos artigos de 2020 em diante:

- Google scholar
- IEEE Xplore

- SpringerLink
- ResearchGate

3.1.3 Filtragem por título

Definiu-se que os artigos serão filtrado com base na conformidade dos seus títulos com o tema do trabalho. Caso haja dúvida quanto à relevância do paper para o trabalho, este seguirá para a fase seguinte de filtragem.

3.1.4 Filtragem por abstract

Nesta fase, filtram-se novamente os artigos que não estejam em conformidade com o tema do trabalho. Não são considerados relevantes aqueles que tratam unicamente de topologias bidimensionais nem os que utilizam aprendizado de máquina de forma secundária, isto é, fora do processo de otimização de topologia. Os artigos cuja classificação quanto à aptidão para compor o estado da arte não seja definitiva, avançam para a fase seguinte de filtragem.

3.1.5 Filtragem por leitura de artigo na integra

Nesta fase, filtram-se novamente os artigos que não estejam em conformidade com o tema do trabalho, isto é, aqueles que abordam exclusivamente topologias bidimensionais e os que utilizam aprendizado de máquina como recurso secundário, bem como aqueles que não avaliam seus modelos em comparação com métodos clássicos de otimização de topologia em relação à compliance.

3.1.6 Ordenação hierárquica de artigos e definição do estado da arte

Finalmente, são ordenados os papers de acordo com a pior taxa de erro de compliance da solução de ML em relação à compliance da solução produzida por algoritmos clássicos nos benchmarks apresentados, em ordem ascendente. No caso de benchmarks com variações de parâmetros, optou-se sempre pelo caso mais complexo, como por exemplo, o da malha com maior definição. Feito isso, definiu-se o estado da arte como os papers que apresentaram taxa

de erro 0 %, ou seja, modelos que igualam ou superam o desempenho clássico.

Vale ressaltar, no estágio atual, uma limitação do trabalho: não há uma maneira padronizada de testar algoritmos de TO. Há alguns objetos considerados padrão para testagem, como o *cantilever bridge* ou o *MBB beam*, porém não há consistência entre trabalhos no tipo de objeto testado, nem nos parâmetros iniciais. Além disso, mesmo que um mesmo objeto seja utilizado como benchmark em dois ou mais papers, isso não indica superioridade de um modelo em relação a outro, pois, em um mesmo modelo de testagem padrão, os algoritmos podem ser avaliados de acordo com uma multiplicidade de forças de magnitudes e direções diversas, também sem padronização. Outro ponto a ressaltar é a falta de consistência dos algoritmos clássicos contra os quais se comparam os métodos de MLTO. Sendo assim, não se considerou apenas implementações que utilizassem SIMP (o mais comum), buscando maior diversidade de papers e uma comparação da MLTO com a TO como um todo. Portanto, o que se obtém através da ordenação hierárquica dos papers é uma aproximação de desempenho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 CLASSIFICAÇÕES

Após a filtragem final e a ordenação dos artigos, chegou-se ao seguinte resultado:

Tabela 1 – Ordenação hierárquica de trabalhos com base na taxa de erro

Classificação	Nome do trabalho	Autor(a/es)	Taxa de erro	Ano
1	Accelerated topology optimization design of 3D structures based on deep learning	Xiang, C., Wang, D., Pan, Y., Chen, A., Zhou, X., Zhang, Y.	-2.83%	2022
2	A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs	Wang, C., Lian, Y., Gao, R. et al.	-1.3%	2024
3	Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network	Shin, J., Kim, C.	-0.4%	-2022
4	TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks	Chandrasekhar, A., Suresh, K.	-0.03%	2021
5	Enhancing topology optimization with adaptive deep learning	Zhang, Y., Jia, C., Liu, X., Xu, J., Guo, B., Wang, Y., Zhang, S.	-0.01%	2024

Classificação	Nome do trabalho	Autor(a/es)	Taxa de erro	Ano
6	A one-time training machine learning method for general structural topology optimization	Zhan, S., Shi, X., Feng, X., Zhao, Z.	0.0%	2024
6	DMF-TONN: Direct Mesh-free Topology Optimization using Neural Networks	Joglekar, A., Chen, H., Kara, L. B.	0.0%	2024
7	A machine-learning framework for isogeometric topology optimization	Xia, Z., Zhang, H., Zhuang, Z., Yu, C., Yu, J., Gao, L.	0.28%	2023
8	Machine learning for topology optimization: Physics-based learning through an independent training strategy	Senhora, F. V., Chi, H., Zhang, Y., Mirabella, L., Tang, T. L. E., Paulino, G. H.	1.5%	2022
9	Accelerated topology optimization by means of deep learning	Kallioras, N. A., Karkakis, G., Lagaros	2.09%	2020
10	Data-driven topology optimization (DDTO) for three-dimensional continuum structures	Guo, Y., Du, Z., Wang, L. et al.	2.93%	2023
11	Topological dimensionality reduction-based machine learning for efficient gradient-free 3D topology optimization	Sun, Z., Wang, Y., Liu, P., Luo, Y.	3.23%	2022

Classificação	Nome do trabalho	Autor(a/es)	Taxa de erro	Ano
12	A Physics-Informed Neural Network-based Topology Optimization (PINNTO) framework for structural optimization	Jeong, H., Bai, J., Batuwatta-Gamage, C. P., Rathnayaka, C., Zhou, Y., Gu, Y.	5.2%	2023
13	Algorithmically-consistent deep learning frameworks for structural topology optimization	Rade, J., Balu, A., Herron, E., Pathak, J., Ranade, R., Sarkar, S., Krishnamurthy, A.	5.62%	2021
14	A complete Physics-Informed Neural Network-based framework for structural topology optimization	Jeong, H., Batuwatta-Gamage, C., Bai, J., Xie, Y. M., Rathnayaka, C., Zhou, Y., Gu, Y.	8.52%	2023
15	Real-Time Topology Optimization in 3D via Deep Transfer Learning	Behzadi, M., Ilies, H.	10.1%	2021

4.2 DESCRIÇÃO DOS ESTUDOS QUE COMPÕEM O ESTADO DA ARTE

4.2.1 "Accelerated topology optimization design of 3D structures based on deep learning":

O trabalho implementou uma arquitetura de rede neural, projetada para prever estruturas sem utilizar esquemas iterativos. A arquitetura baseia-se na rede neural pré-existente U-Net e compreende caminhos de codificação e decodificação para processar um tensor de entrada de dez canais, com dimensões iniciais de $33 \times 17 \times 9$, ajustadas para $32 \times 16 \times 8$ por meio de uma convolução inicial. O codificador é composto por três blocos, cada um com duas camadas convolucionais (núcleo $3 \times 3 \times 3$, passo 1, ativação ReLU), duas camadas de normalização em

lote (batch normalization) e uma camada de *max pooling*. O decodificador espelha essa estrutura por meio de três blocos que utilizam convoluções transpostas, normalização em lote e camadas convolucionais, incorporando mapas de características dos blocos codificadores correspondentes através de conexões de salto (skip connections). A saída final é processada por uma camada convolucional com ativação sigmoide para gerar um mapa de probabilidade no intervalo $[0, 1]$. Para o treinamento, utilizou-se um conjunto de dados de 35 000 amostras geradas pelo método SIMP (80 % para treino, 10 % para validação e 10 % para teste), e os pesos da rede foram otimizados com o algoritmo Adam e uma função de perda que combina a divergência de Kullback-Leibler (KL) com regularização L2. Notavelmente, uma vez treinada, a rede proposta demonstrou aceleração computacional significativa, exigindo, em média, apenas 0,26 % do tempo necessário pelo método SIMP tradicional para obter um resultado.

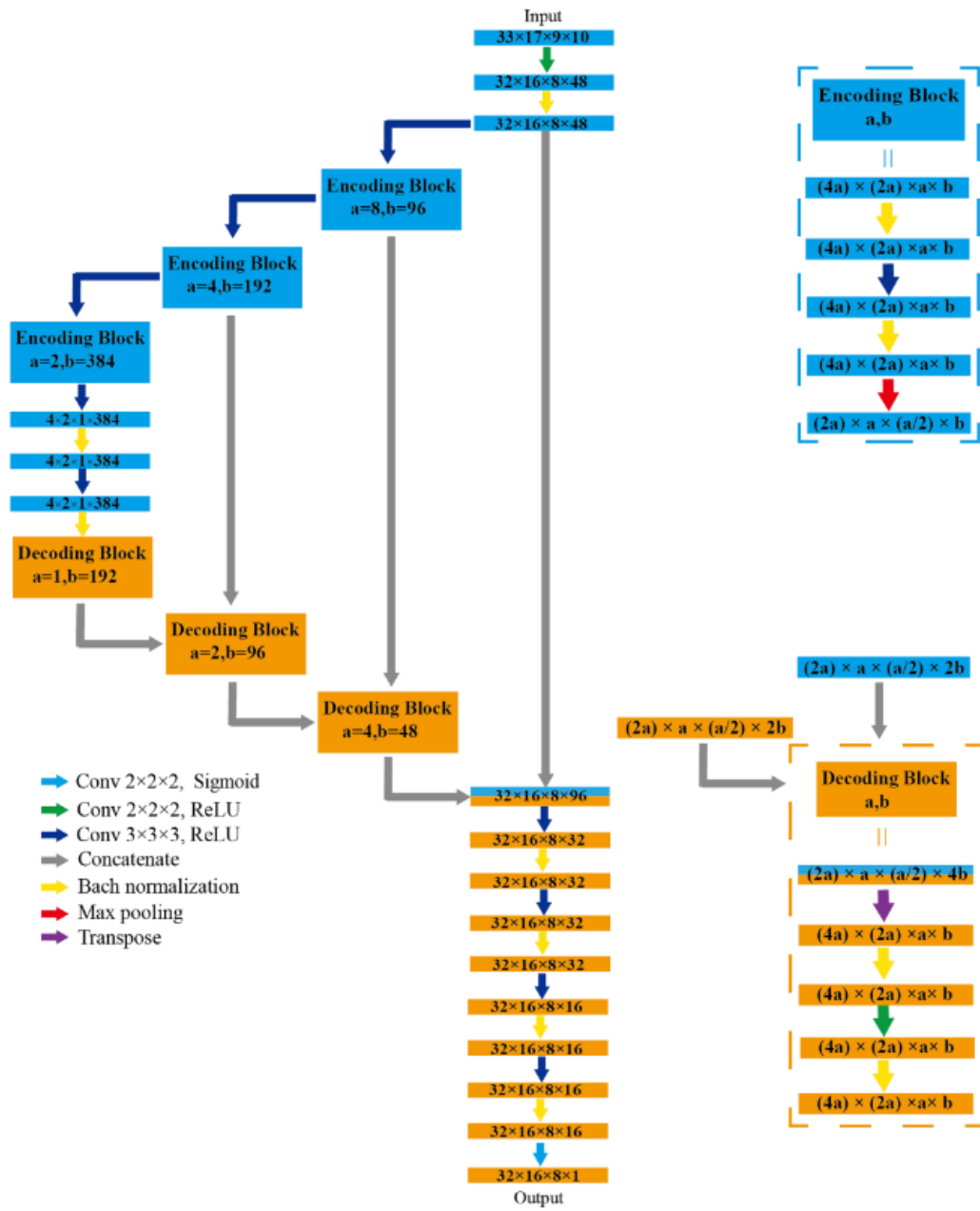


Figura 3 – Arquitetura da rede neural (XIANG et al., 2022)

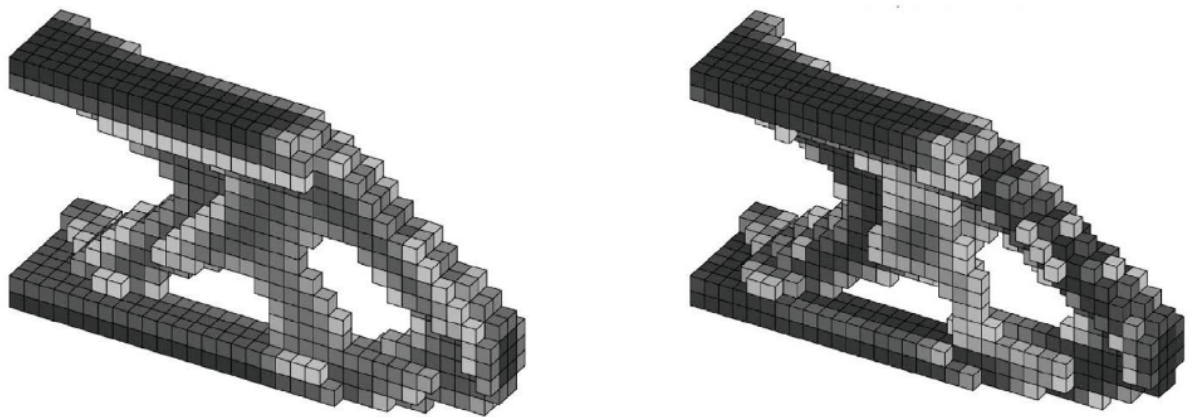


Figura 4 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método proposto (XIANG et al., 2022).

4.2.2 "A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs":

Este trabalho apresenta um método de TO denominado Multi-point Synergistic Gradient Evolution (MSGE), que utiliza uma rede neural artificial inserida iterativamente em um framework baseado em gradiente (como o SIMP). A rede neural funciona como geradora de topologias candidatas, cujos parâmetros (pesos e vieses) são tratados como variáveis de projeto (pontos que expressam as densidades). A cada iteração, realiza-se uma análise de elementos finitos de todas as topologias da população, seguida de retropropagação do gradiente que atualiza simultaneamente esses parâmetros, viabilizando a convergência para projetos de alto desempenho ou, alternativamente, a obtenção de múltiplas soluções viáveis.

A arquitetura da rede neural baseia-se em um modelo U-Net com camadas de convolução, operações de *upsampling* e normalização em lote (batch normalization). Especificamente, há uma camada inicial densa (linear) que transforma o vetor de entrada em formato adequado à U-Net, seguida por blocos de convolução e upsampling que ampliam progressivamente a dimensão espacial até atingir o tamanho final do domínio de projeto. Esses blocos empregam parâmetros como número de canais (por exemplo, 64, 32 e 16) e tamanhos de kernel (3×3 , 5×5 etc.), que podem variar para equilibrar fidelidade e custo computacional. Por fim, uma camada de convolução adicional atua como filtro de densidade. O treinamento da rede não ocorre com base em dados previamente etiquetados; em vez disso, pesos e vieses são otimizados diretamente via

backpropagation dentro do ciclo iterativo de TO para calcular as sensibilidades de cada projeto. Esse processo dispensa coleta de dados externos e evita problemas de generalização associados a mudanças nas condições de contorno. Resultados numéricos mostram que o MSGE pode reduzir em até 17 vezes o número de avaliações por análise de elementos finitos em relação a métodos clássicos, indicando considerável economia de custo computacional.

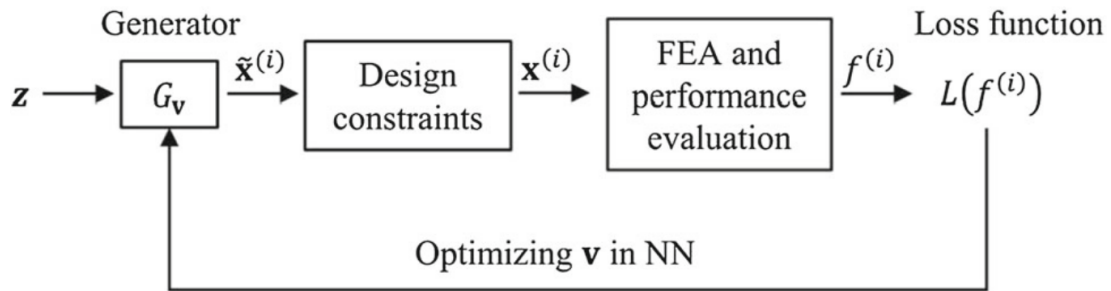


Figura 5 – Diagrama ilustrando o método *Multi-point synergistic gradient topology optimization* (WANG et al., 2024).

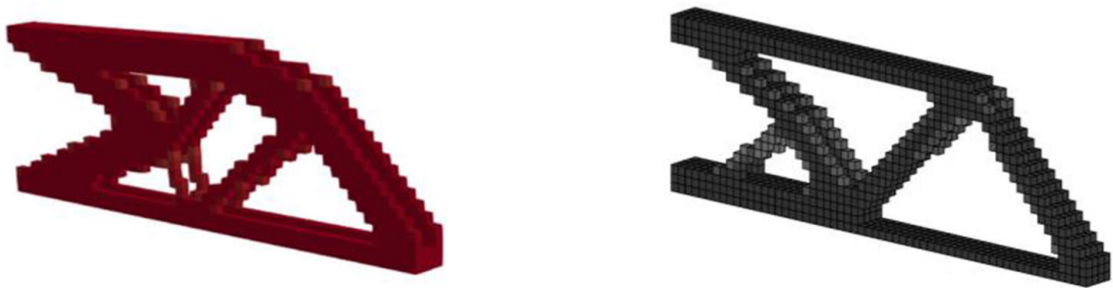


Figura 6 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À direita uma topologia produzida pelo método SIMP, à esquerda pelo método MSGE (WANG et al., 2024).

4.2.3 "Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network":

Este trabalho propõe uma abordagem para MLTO que integra o método BESO (bi-directional evolutionary structural optimization) e uma rede neural profunda (deep neural network). A ideia central consiste em utilizar um modelo treinado para prever, logo no início da otimização, uma topologia próxima do ótimo, reduzindo assim o número total de iterações necessárias para convergir para uma solução final. O método, portanto, mantém o caráter

iterativo típico do BESO, mas inicia o processo a partir de um estado já “avançado” gerado pela rede neural, diminuindo o esforço computacional.

A arquitetura da rede neural adotada é baseada em uma CNN (rede neural convolucional), combinada a um esquema de segmentação de imagens digitais que mapeia as topologias em representações adequadas ao treinamento. Um conjunto de 3200 topologias ótimas previamente obtidas por meio do BESO serviu como base de dados para o treinamento supervisionado da rede. Após a predição inicial, as últimas etapas de refinamento ficam a cargo do BESO, que ajusta a topologia até os critérios de parada. A integração CNN–BESO mostrou uma redução de 72,5% no número de iterações, o que também demonstra eficiência computacional significativa.

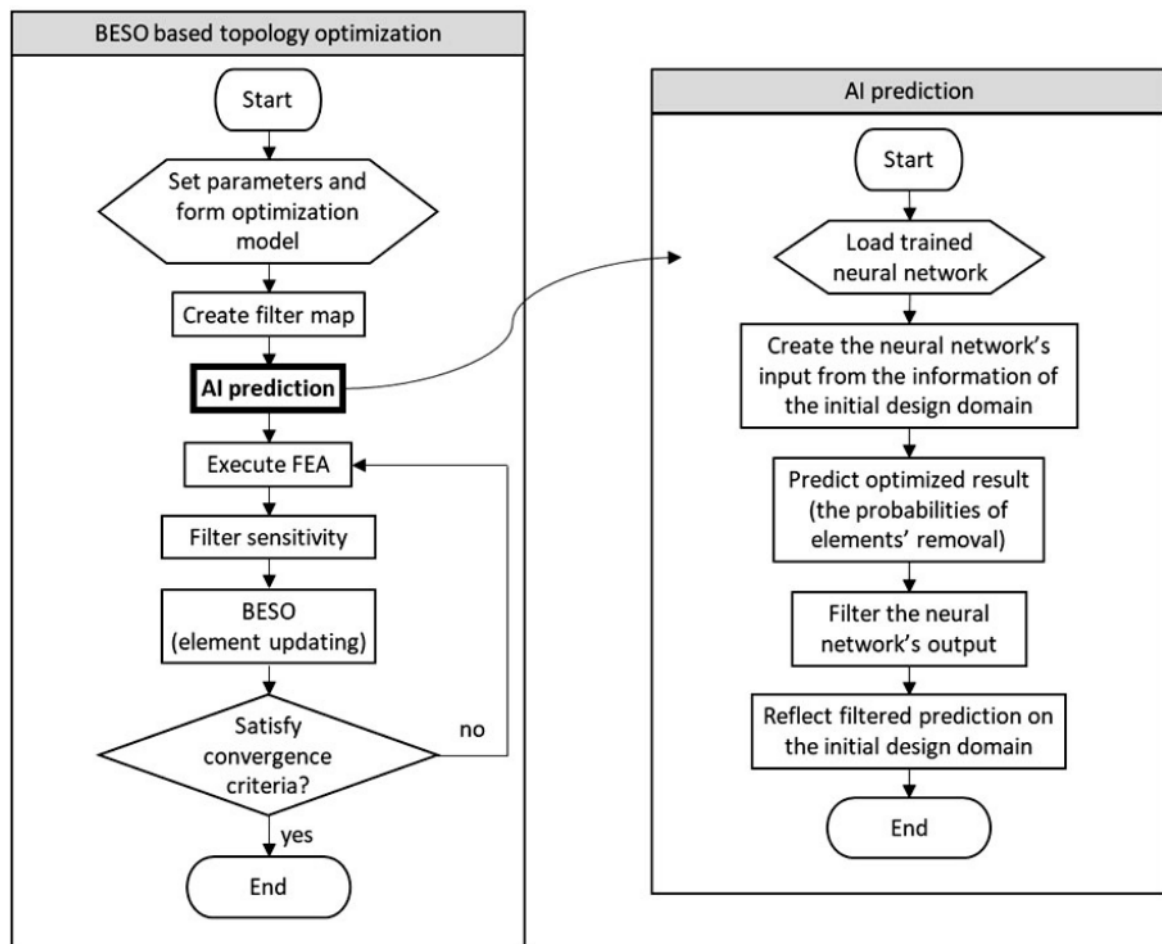


Figura 7 – Diagrama ilustrando o método (SHIN; KIM, 2022).

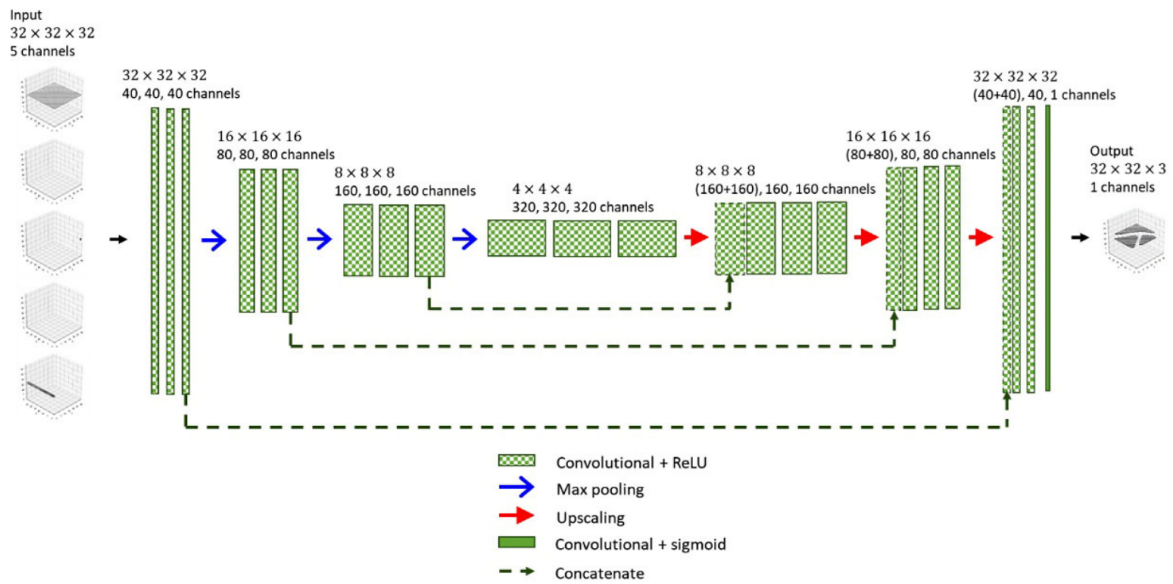


Figura 8 – Diagrama ilustrando a arquitetura da rede neural utilizada (SHIN; KIM, 2022).

4.2.4 "TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks":

Propõe-se, no artigo, um método iterativo que executa a TO por meio de uma rede neural totalmente conectada, tratando os pesos e vieses como variáveis de projeto que descrevem, via suas funções de ativação, o campo de densidades do SIMP. A cada época, a NN recebe as coordenadas (x, y, z) e devolve ρ , passando por camadas ocultas com LeakyReLU + Batch Norm e por uma camada final soft-max que obriga $\rho \in [0, 1]$. A implementação-padrão usa cinco camadas com 20 neurônios cada (1.782 parâmetros, comparável ao número de elementos de uma malha 60×30), mas estudos variando profundidade $\times$ largura mostram que topologias razoáveis já surgem com arquiteturas bem menores.

Diferentemente de abordagens *data-driven*, a rede não exige treinamento prévio: os pesos são inicializados por "Glorot normal" e, em cada passo, calcula-se ρ , executa-se a análise por elementos finitos, a partir disso, computa-se a função de perda e, com as sensibilidades obtidas pela combinação back-prop + adjunto, atualizam-se os pesos via Adam ($\eta = 0,01$) sob esquemas de continuação em α ($0,1 \rightarrow 100$) e p ($2 \rightarrow 4$) até que a fração de elementos cinza caia abaixo de 3,5 % ou se chegue a 500 iterações. Embora cada iteração da TOuNN tenha um custo computacional cerca do dobro de uma iteração SIMP, o tempo total costuma ser menor, graças à redução drástica de FEA.

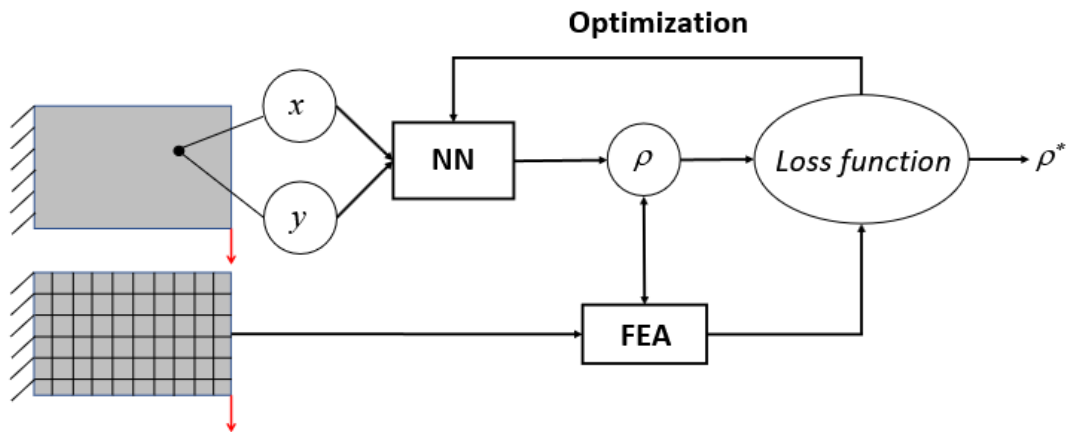


Figura 9 – Diagrama ilustrando o método TOuNN em duas dimensões (CHANDRASEKHAR; SURESH, 2020).

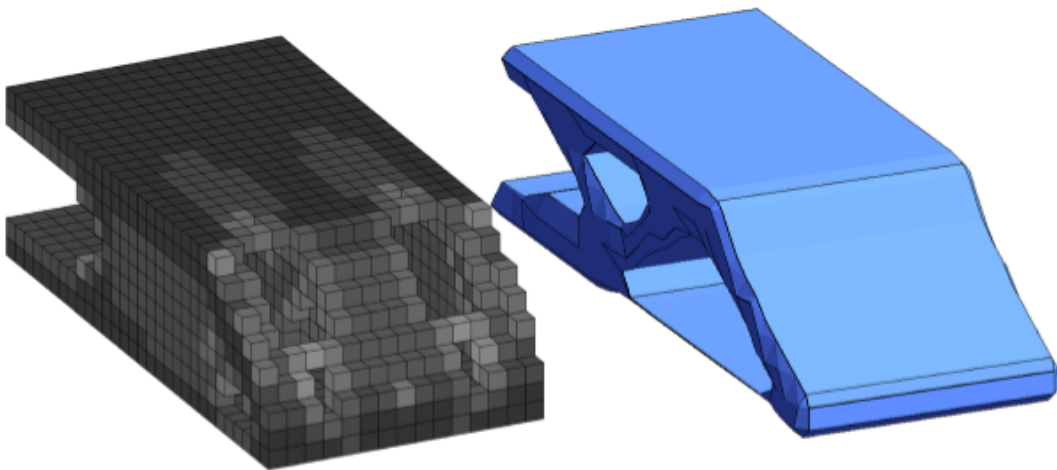


Figura 10 – Exemplos da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método TOuNN (CHANDRASEKHAR; SURESH, 2020).

4.2.5 "Enhancing topology optimization with adaptive deep learning":

Este trabalho propõe o Adaptive Deep Learning (ADL), um esquema iterativo de MLTO, que integra um modelo baseado em Probabilistic Convolutional Neural Network (P-CNN) com estratégias de busca global por meio de um algoritmo genético adaptativo e refinamento local utilizando o método clássico de TO, o MMA. Inicialmente, amostras de variáveis de projeto são geradas aleatoriamente e avaliadas por análise de elementos finitos, formando um conjunto de treinamento para o P-CNN. Em seguida, o modelo preditivo é empregado como estimador

de função-objetivo para guiar o algoritmo genético com mutação adaptativa de cromossomos, cujo melhor indivíduo serve como ponto inicial para a introdução de informação de gradiente via MMA. Novos pontos são selecionados de forma adaptativa em torno do ótimo atual, avaliados por elementos finitos e reincorporados ao conjunto de treinamento, repetindo-se o ciclo até a convergência.

A P-CNN utiliza camadas convolucionais probabilísticas (P-CL), em que cada filtro armazena média e variância e aplica reparametrização local para estimar incertezas, seguidas de normalização em lote e ativação Softplus. Sua saída, composta pela média e pelo desvio-padrão da função-objetivo e pela entropia de Kullback-Leibler, é treinada via otimização “Bayes by Backprop”, combinando erro quadrático médio e divergência de KL em uma única perda ponderada. O treinamento emprega o otimizador Adam com escalonamento da taxa de aprendizado (StepLR) e segue hiperparâmetros ajustados caso a caso. Em termos de aceleração computacional, o ADL convergiu até 95% mais rápido quando comparado a métodos convencionais nos casos em que foi testado.

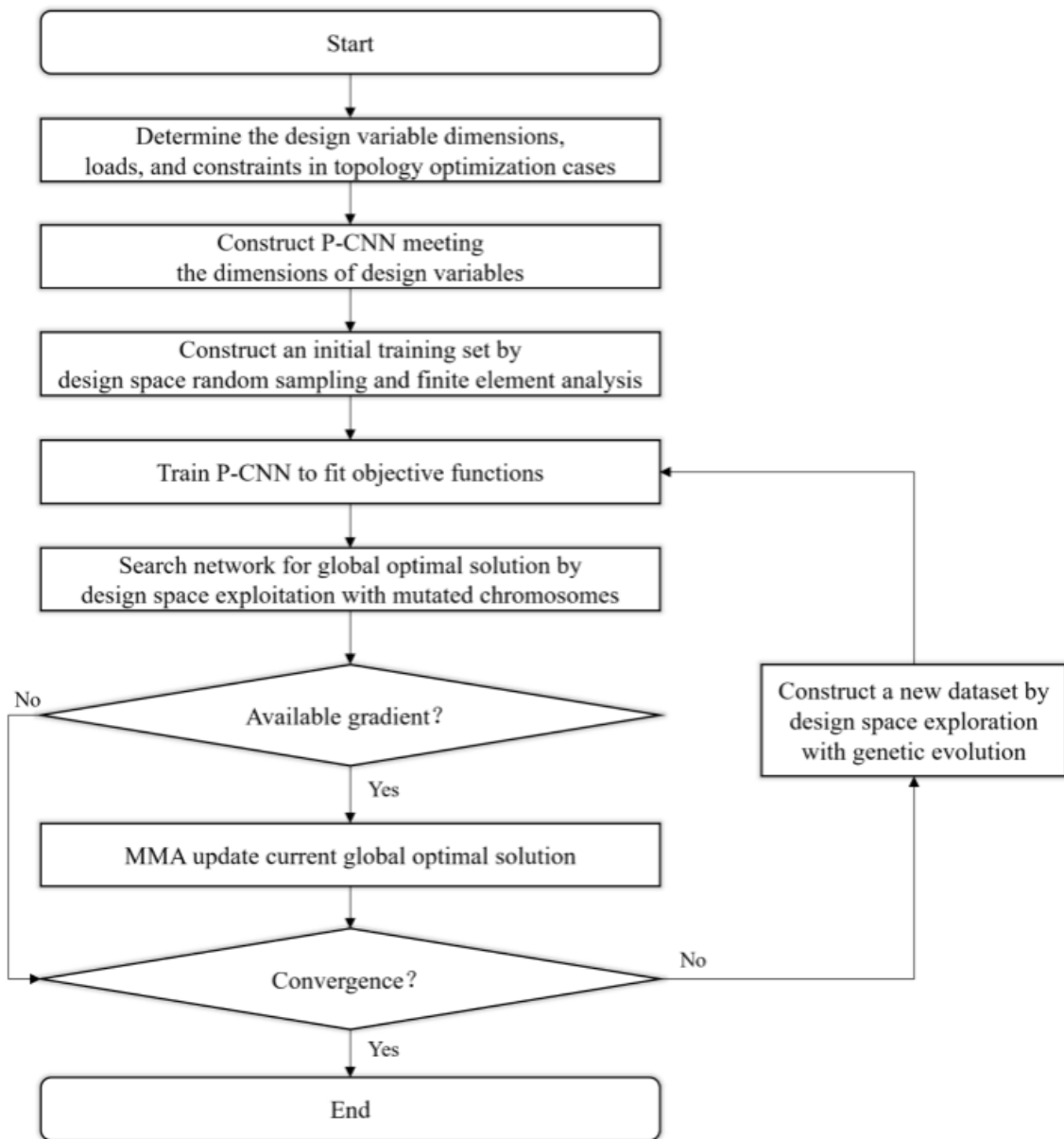


Figura 11 – Diagrama ilustrando o método ADL (ZHANG et al., 2024).

4.2.6 "A one-time training machine learning method for general structural topology optimization":

Este artigo propõe um método de aprendizado de máquina com treinamento único para otimização topológica estrutural (TO) com capacidade generalizável a diferentes tipos de problemas. A abordagem consiste na utilização de uma rede neural convolucional treinada apenas uma vez, com um conjunto de dados de 3.200 topologias geradas pelo SIMP, para prever diretamente os resultados de otimização topológica a partir de campos de deslocamento e

configurações de carregamento. O modelo é composto por três blocos convolucionais seguidos por camadas totalmente conectadas, sendo treinado com dados de problemas de referência obtidos por meio do SIMP em diferentes condições de contorno, frações volumétricas e tipos de carregamento. Durante o treinamento, os autores aplicam uma função de perda definida pelo erro quadrático médio da predição de densidade e uma função de regularização para estabilizar a otimização.

O método proposto é inteiramente não iterativo, uma vez que a rede realiza inferência direta a partir da entrada e não depende de ciclos de retroalimentação. Em termos de desempenho computacional, os autores destacam uma redução significativa no tempo de geração das topologias otimizadas — de ordens de minutos (métodos tradicionais, como o SIMP) para segundos.

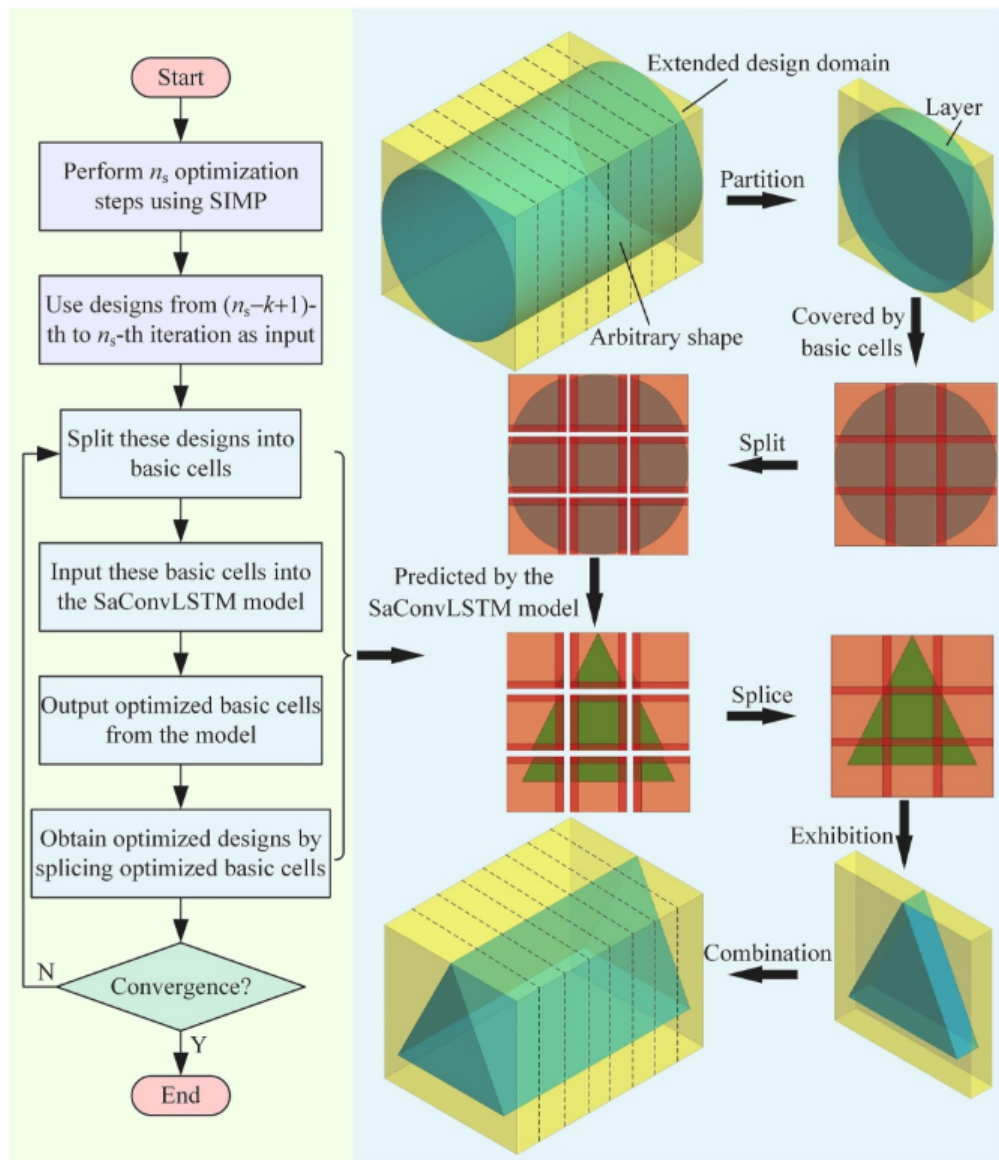


Figura 12 – Diagrama ilustrando o método OTML (ZHAN et al., 2024).

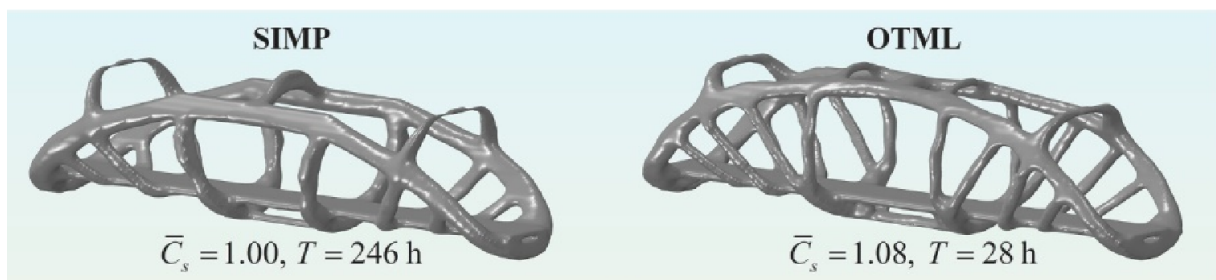


Figura 13 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método OTML (ZHAN et al., 2024).

4.2.7 "DMF-TONN: Direct Mesh-free Topology Optimization using Neural Networks":

O artigo propõe o método DMF-TONN (Direct Mesh-Free Topology Optimization using Neural Networks), uma abordagem totalmente livre de malha para otimização topológica. A proposta consiste em conectar duas redes neurais: uma para o campo de deslocamentos e outra para estimar o campo de densidade, sendo que a saída da primeira alimenta diretamente a segunda, dispensando o uso de FEA tradicional.

A rede de deslocamentos é do tipo *physics-informed* — incorpora leis da física diretamente na sua função de treinamento — e é treinada para resolver a equação de elasticidade linear via princípio da energia potencial mínima. Já a rede de densidade utiliza *Fourier Features* como entrada e apresenta uma arquitetura com ativação senoidal, seguida de uma camada densa e função sigmoide na saída, assegurando valores entre 0 e 1.

A solução proposta é iterativa: a cada iteração, realiza-se uma única etapa de descida do gradiente na rede de densidade, propagando-o diretamente através da rede de deslocamentos. O treinamento das redes é completamente online, isto é, não há pré-treinamento.

Finalmente, em termos de desempenho computacional, o método difere dos demais, sendo até 2,6 vezes mais lento que o SIMP tradicional.

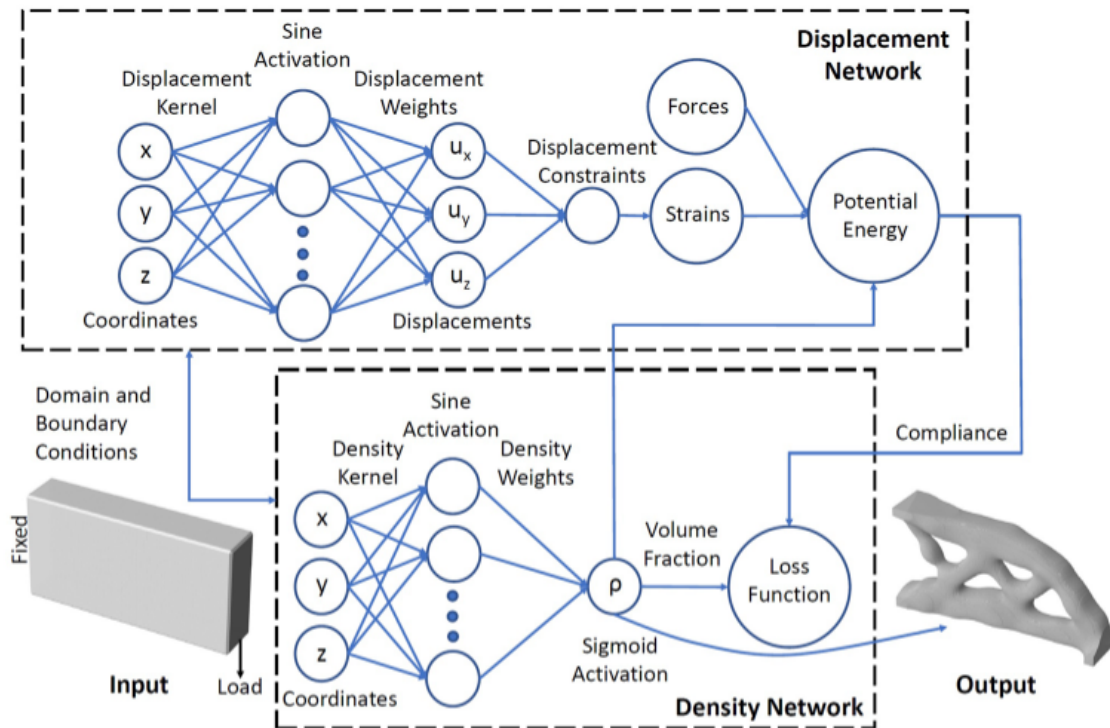


Figura 14 – Diagrama ilustrando o método DMF-TONN (JOGLEKAR et al., 2024).

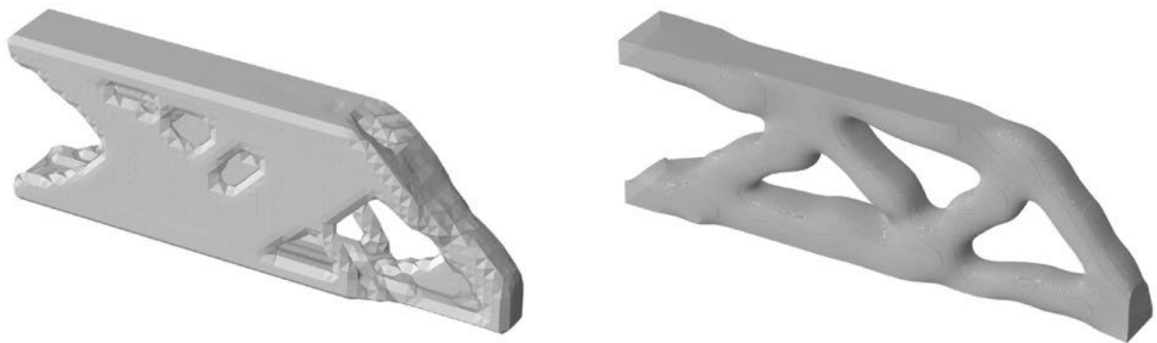


Figura 15 – Exemplo da topologia produzida pelo algoritmo. À esquerda uma topologia produzida pelo método SIMP, à direita pelo método DMF-TONN (JOGLEKAR et al., 2024).

4.3 ANÁLISE DO ESTADO DA ARTE

O estado da arte de MLTO integra-se por duas categorias principais: métodos não iterativos e métodos iterativos. Os métodos não iterativos, exemplificados pelos artigos “Accelerated

topology optimization design of 3D structures based on deep learning” e “A one-time training machine learning method for general structural topology optimization”, utilizam redes pré-treinadas capazes de prever diretamente a distribuição de densidade ótima sem a necessidade de ciclos adicionais de refinamento. Essas abordagens realizam inferência única (*one-shot*) e reduzem, nas maiores ordens de grandeza, o tempo de processamento em comparação ao método SIMP tradicional — se não for considerado o tempo de treinamento, que acarreta custo computacional e temporal elevados.

Já os métodos iterativos retomam o fluxo clássico de TO — inferência, avaliação e atualização. O trabalho a seguir diferencia dois tipos de métodos iterativos: os híbridos e os puros. Os métodos híbridos integram o aprendizado de máquina em alguma fase do ciclo de TO clássico, sempre se baseando no FEA para o direcionamento da otimização, como exemplificado pelos artigos “TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks”, “A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs”, “Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network” e “Enhancing topology optimization with adaptive deep learning”. Já nos métodos puros, pelo contrário, exemplificado pelo artigo “DMF-TONN: Direct Mesh-Free Topology Optimization using Neural Networks”, a própria arquitetura neural resolve internamente equações de elasticidade — sem necessidade de FEA — combinando sub-redes physics-informed e otimização por descida de gradiente para produzir o campo de densidade diretamente a partir de perdas físicas informadas, sem nenhum auxílio de TO clássico em nenhum momento do processo.

Os artigos pertencentes ao tipo híbrido apresentaram aceleração computacional frequentemente superiores a 60 %, sem comprometer a acurácia final. Já o artigo analisado da categoria pura foi o único que não seguiu essa tendência.

Embora as diferentes estratégias, iterativas ou não, apresentem geralmente ganhos expressivos em termos de eficácia computacional — sem comprometer ou inclusive melhorando a acurácia, quando comparadas com métodos tradicionais —, a ausência de benchmarks padronizados e a diversidade de critérios de avaliação (geometrias testadas, fração volumétrica, magnitude e direção das cargas) em todos os trabalhos ainda dificultam comparações diretas. Adicionalmente, poucos estudos validam suas soluções em cenários experimentais, o que limita sua adoção industrial.

Destaca-se também a ausência de implementações baseadas em arquiteturas que com- põem o estado da arte atual de ML voltado a imagens – leia-se arquiteturas de difusão ou de

autorregressão, baseadas em *transformers* ou não. Dado o fato de que os transformers representaram um salto qualitativo em várias aplicações de ML, é muito provável que representem o mesmo para MLTO.

Tabela 2 – Resumo dos artigos analisados

Nome do Trabalho	Autor(a/es)	Taxa de Erro	Ano	Iterativo?	Tipo
Accelerated topology optimization design of 3D structures based on deep learning	Xiang, C.; Wang, D.; Pan, Y.; Chen, A.; Zhou, X.; Zhang, Y.	-2.83%	2022	Não	—
A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs	Wang, C.; Lian, Y.; Gao, R. et al.	-1.30%	2024	Sim	Híbrido
Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network	Shin, J.; Kim, C.	-0.40%	2022	Sim	Híbrido
TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks	Chandrasekhar, A.; Suresh, K.	-0.03%	2021	Sim	Híbrido
Enhancing topology optimization with adaptive deep learning	Zhang, Y.; Jia, C.; Liu, X.; Xu, J.; Guo, B.; Wang, Y.; Zhang, S.	-0.01%	2024	Sim	Híbrido

Nome do Trabalho	Autor(es)	Taxa de Erro	Ano	Iterativo?	Tipo
A one-time training machine learning method for general structural topology optimization	Zhan, S.; Shi, X.; Feng, X.; Zhao, Z.	0.00%	2024	Não	—
DMF-TONN: Direct Mesh-free Topology Optimization using Neural Networks	Joglekar, A.; Chen, H.; Kara, L. B.	0.00%	2024	Sim	Puro

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um levantamento sistemático do estado da arte de MLTO, cobrindo métodos não iterativos e iterativos. A análise dos principais estudos demonstrou que as soluções data-driven pré-treinadas (não iterativas) são capazes de produzir topologias de elevada qualidade, com reduções de tempo de processamento superiores a 99% em relação ao método SIMP clássico. Já os métodos iterativos têm um ganho de desempenho menor ou, inclusive, pior, mas ainda produzem topologias de boa qualidade.

Apesar dos avanços expressivos na área, o estudo revelou limitações que ainda geram incertezas quanto à adequação da MLTO para adoção industrial plena. Mais especificamente, foi identificada a ausência de benchmarks padronizados de avaliação e de validações experimentais em larga escala que ofereçam robustez estatística à eficácia do método. Como direções futuras nesse aspecto, recomenda-se o desenvolvimento de frameworks de avaliação uniformes, contendo casos-teste padronizados capazes de estimar incertezas e garantir robustez em aplicações reais, a fim de aumentar a confiabilidade e a aplicabilidade prática.

Adicionalmente, observa-se a inexistência de implementações baseadas em arquiteturas do atual estado da arte em processamento de imagens. Recomenda-se, portanto, explorar implementações que utilizem difusão, autorregressão e transformers (de forma iterativa ou não) para potencialmente elevar ainda mais a qualidade das topologias geradas.

Em síntese, a MLTO mostra-se hoje como uma área promissora, com novas avenidas a serem exploradas, capaz de transformar radicalmente o tempo e o custo de projetos estruturais, mas ainda carece de validação padronizada para alcançar a maturidade industrial.

REFERÊNCIAS

SHIN, Seungyeon; SHIN, Dongju; KANG, Namwoo. Topology Optimization via Machine Learning and Deep Learning: A Review.

FORTUNE BUSINESS INSIGHTS. 3D Printing Market Size, Share, Trends and Global Analysis by 2032. [S.l.]: Fortune Business Insights, 2025. Disponível em: <https://www.fortunebusinessinsights.com/press-release/3d-printing-market-9479>. Acesso em: 19 maio 2025.

CZINGER. The Czinger 21C hypercar. [s.l.]: CZINGER, [s.d.]. Disponível em: <https://www.czinger.com/around-the-world/7>. Acesso em: 19 maio 2025.

CAR MAGAZINE. Czinger 21C: Meet the founders of ‘most badass’ supercar maker that toppled Goodwood record. [S.l.]: Car Magazine, 17 jul. 2024. Disponível em: <https://www.carmagazine.co.uk/car-news/first-official-pictures/czinger/21c/>. Acesso em: 19 maio 2025.

SHER, D. 5-m long titanium airplane part 3D printed in one piece. 18 jan. 2013. Disponível em: <https://www.3ders.org/articles/20130118-3-meter-long-titanium-airplane-part-3d-printed-in-one-piece.html>. Acesso em: 20 maio 2025.

STANFORD UNIVERSITY. Human-Centered AI Institute. AI Index Report 2025, Stanford University, 2025. Disponível em: <https://hai.stanford.edu/research/ai-index>. Acesso em: 19 maio 2025.

CHAMATIDIS, I.; STOUMPOS, M.; KAZAKIS, G.; KALLIORAS, N. A.; TRIANTAFYLLOU, S.; PLEVRIS, V.; LAGAROS, N. D. Overview on Machine Learning Assisted Topology Optimization Methodologies. Em: RABCZUK, T.; BATHE, K. J. (Eds.). Machine Learning in Modeling and Simulation. Computational Methods in Engineering & the Sciences. Springer, 2023.

STRAUSS, W. A. Partial Differential Equations: An Introduction. Wiley, 2008.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., & Zhu, J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005.

BENDSØE, Martin P.; SIGMUND, Ole. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

GOODFELLOW, I., BENGIO, Y., & COURVILLE, A. Deep Learning. MIT Press, 2016.

XIANG, C.; WANG, D.; PAN, Y.; CHEN, A.; ZHOU, X.; ZHANG, Y. Accelerated topology optimization design of 3D structures based on deep learning. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022.

WANG, C.; LIAN, Y.; GAO, R.; XIONG, F.; LI, M.-J. A multi-point synergistic gradient evolution method for topology optimization leveraging neural network with applications in converged and diverse designs. Computational Mechanics, 2024.

SHIN, J.; KIM, C. Bi-directional evolutionary 3D topology optimization with a deep neural network. Journal of Mechanical Science and Technology, 2022.

CHANDRASEKHAR, A.; SURESH, K. TOuNN: Topology Optimization using Neural Networks. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020.

ZHANG, Y.; JIA, C.; LIU, X.; XU, J.; GUO, B.; WANG, Y.; ZHANG, S. Enhancing topology optimization with adaptive deep learning. Computers & Structures, 2024.

ZHAN, S.; SHI, X.; FENG, X.; ZHAO, Z. A one-time training machine learning method for general structural topology optimization. Thin-Walled Structures, 2024.

JOGLEKAR, A.; CHEN, H.; KARA, L. B. DMF-TONN: Direct mesh-free topology optimization using neural networks. Engineering with Computers, 2024.

XIA, Z.; ZHANG, H.; ZHUANG, Z.; YU, C.; YU, J.; GAO, L. A machine-learning framework for isogeometric topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2023.

SENHORA, F. V.; CHI, H.; ZHANG, Y.; MIRABELLA, L.; TANG, T. L. E.; PAULINO, G. H. Machine learning for topology optimization: Physics-based learning through an independent training strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022.

KALLIORAS, N. A.; KAZAKIS, G.; LAGAROS, N. D. Accelerated topology optimization by means of deep learning. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020.

GUO, Y.; DU, Z.; WANG, L. Data-driven topology optimization (DDTO) for three-dimensional continuum structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023.

SUN, Z.; WANG, Y.; LIU, P.; LUO, Y. Topological dimensionality reduction-based machine learning for efficient gradient-free 3D topology optimization. *Materials & Design*, 2022.

JEONG, H.; BAI, J.; BATUWATTA-GAMAGE, C. P.; RATHNAYAKA, C.; ZHOU, Y.; GU, Y. A Physics-Informed Neural Network-based Topology Optimization (PINNTO) framework for structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023.

RADE, J.; BALU, A.; HERRON, E.; PATHAK, J.; RANADE, R.; SARKAR, S.; KRISHNAMURTHY, A. Algorithmically-consistent deep learning frameworks for structural topology optimization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2021.

JEONG, H.; BATUWATTA-GAMAGE, C. P.; BAI, J.; XIE, Y. M.; RATHNAYAKA, C.; ZHOU, Y.; GU, Y. A complete Physics-Informed Neural Network-based framework for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023.

BEHZADI, M. M.; ILIES, H. T. Real-time topology optimization in 3D via deep transfer learning. *Computer-Aided Design*, 2021.